Temel Geometrik Şekillere Farklı Sayısal Karşılıklar

Bünyamin ŞAHİN
Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Konya, TÜRKİYE
bunyamin.sahin@selcuk.edu.tr

Rukiye Feyza ŞAHİN
Nevzat Karabağ Anadolu Lisesi, 10. Sınıf Öğrencisi, Erzurum, TÜRKİYE
feyruksah06@gmail.com

Özet. Bu çalışmada temel geometrik şekiller olan birimlendirilmiş doğru parçası ve düzgün çokgenlere ne tür sayısal karşılıklar getirilebileceği incelenmiştir. Bunun için uzunluk ve bağımsız kümelerden yararlanılmıştır. Birimlendirilmiş doğru parçası ve herhangi bir düzgün çokgen üzerinde her bir noktanın diğer noktalara uzaklıklarının toplamı formülize edilmiş, ayrıca bu temel geometrik şekiller üzerindeki bağımsız küme sayılarının toplamı Fibonacci ve Lucas sayılarıyla temsil edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Doğru parçası, Düzgün çokgen, Fibonacci sayıları, altın oran,

Amaç

Öğrenim hayatımız boyunca en sık karşılatığımız geometrik şekillerden biri birimlendirilmiş doğru parçasıdır. Cetveller bunlara örnek olarak verilebilir. Bir diğeri ise düzgün çokgenlerdir.

Doğru parçaları tek boyutlu olduğundan bunların anlamlandırılmasında sadece uzunluktan yararlanılabilir. Bir doğru parçasının başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzunluk bu doğru parçasına karşılık gelen bir sayısal niceliktir. Bu uzunluk eşit birimlere ayrıldığında birimlendirilmiş bir doğru parçası elde edilir. Cetvel üzerinde bu birimler cm cinsinden ifade edilir.

Öğrenim hayatımızda sık karşılaştığımız geometrik şekillerden biri de düzgün çokgenlerdir. Çokgenler düzlemsel şekiller olduğundan bunların sayısal karşılıkları olarak uzunluk ve alan olmak üzere iki nicelik karşımıza çıkmaktadır. Bir düzgün çokgenin kenar uzunluğu ve çevre uzunluğu hesaplanabildiği gibi kapladığı yüzey alanı da çeşitli formüller yardımıyla hesaplanabilir.

Bunlar bir doğru parçasının ve bir düzgün çokgenin anlamlandırılmasında kullanılan temel yöntemlerdir. Bu çalışmada "Birimlendirilmiş doğru parçası için uzunluk ve bir düzgün çokgen için uzunluk ve alan dışında acaba başka ne gibi sayısal karşılıklar bulunabilir?" sorusuna cevap aranacaktır.

Giriş

Uzunluk ve alan temel geometrik şekiller için çok kullanışlı sayısal niceliklerdir. Bunların dışında üretilen diğer niceliklerin de kullanışlı araçlar olması beklenmektedir.

1947 yılında Amerikalı kimyager Wiener bazı kimyasal moleküllerin fiziksel özellikleri ile bu moleküllerin yapısal formülleri arasında doğru orantılı bir ilişki olduğunu fark etti. Bu yöntem birimlendirilmiş bir doğru parçası üzerinde aşağıdaki gibi açıklanabilir (Büyükköse ve

Gök, 2020).

Yöntem ve Bulgular

Bir doğru parçası alıp başlangıç noktasına 1 bitiş noktasına n dersek $n-1$ birim uzunluğunda bir doğru parçası elde etmiş oluruz. Bu doğru parçası üzerinde her bir noktanın diğer noktalara olan uzaklığını $D(i)$ $(1 \leq i \leq n)$ ile gösterelim.

1 noktasının 2 ye uzaklığı 1, 3 e uzaklığı 2 ve bu şekilde n ye uzaklığı $n-1$ birimdir. Yani,

$$D(1) = 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

elde edilir

Benzer şekilde 2 noktasının 3 e uzaklığı 1, 4 e uzaklığı 2 ve bu şekilde n ye uzaklığı $n-2$ birimdir. Yani

$$D(2) = 1 + 2 + \cdots + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilerek sondan üçüncü nokta olan $(n-2)$-inci noktanın $(n-1)$-inci noktaya uzaklığı 1 ve n-inci noktaya uzaklığı 2 birimdir. Son olarak $(n-1)$-inci noktanın n-inci noktaya uzaklığı 1 birimdir. Bunlar şöyle gösterilebilir,

$$D(n-2) = 1 + 2 = 3$$
$$D(n-1) = 1$$

n noktalı bir doğru parçası P_n ile gösterilirse bir doğru parçasındaki uzaklıklar toplamı

$$D(P_n) = D(1) + D(2) + \cdots + D(n-1)$$

ile hesaplanır. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$D(P_n) = \binom{n+1}{3}$$

elde edilir. Örnek olarak beş noktalı bir doğru parçası üzerindeki uzaklıklar toplamı

$$D(P_5) = \binom{5+1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde n kenarlı ve n köşeli bir düzgün çokgen üzerinde de aynı işlem ele alınabilir. Bir düzgün çokgen üzerindeki uzaklıklar toplamı köşe sayısının tek veya çift olmasına göre farklılık gösterir. Bunları ayrı ayrı inceleyelim.

Köşe sayısı çiftse herhangi bir köşe ile bu köşeye en uzak köşe arasındaki uzaklık $n/2$ dir. n köşeli bir düzgün çokgenin köşelerini sırasıyla 1 den n ye kadar numaralandıralım. 1 nolu köşenin 2 ye uzaklığı 1 birim, 3 e uzaklığı 2 birim ve bu şekilde $\frac{n}{2}+1$ nolu köşeye uzaklığı $n/2$ birimdir. Bundan sonra uzaklıklar azalarak devam ederek 1 nolu köşenin $(n-2)$ ye uzaklığı 3 birim, $(n-1)$ e uzaklığı 2 birim, ve n ye uzaklığı 1 birimdir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} D(1) &= 1 + 2 + \cdots + \frac{n}{2} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2\left(1 + 2 + \cdots + \frac{n}{2} - 1\right) + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Düzgün bir çokgende her köşenin diğer köşelere uzaklıkları toplamı eşit olduğundan $D(1) = D(2) = \cdots = D(n)$ dir. Düzgün bir çokgen C_n ile gösterilirse

$$D(C_n) = \frac{D(1) + D(2) + \cdots + D(n)}{2}$$

$$= \frac{n \times \frac{n^2}{4}}{2} = \frac{n^3}{8}$$

elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta her iki nokta arası uzaklığın iki defa sayılmış olmasından hareketle çıkan sonucun yarısının alınmasıdır. Şimdi köşe sayısı tek olan düzgün çokgenleri inceleyebiliriz.

Köşe sayısı tekse herhangi bir köşe ile bu köşeye en uzak köşe arasındaki uzaklık $(n-1)/2$ dir. n köşeli bir düzgün çokgenin köşelerini sırasıyla 1 den n ye kadar numaralandıralım. 1 nolu köşenin 2 ye uzaklığı 1 birim, 3 e uzaklığı 2 birim ve bu şekilde $(n+1)/2$ nolu köşeye uzaklığı $(n-1)/2$ birimdir. Bundan sonra uzaklıklar azalarak devam ederek 1 nolu köşenin $(n-2)$ ye uzaklığı 3 birim, $(n-1)$ e uzaklığı 2 birim, ve n ye uzaklığı 1 birimdir. Sonuç olarak

$$D(1) = 1 + 2 + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \ldots + 2 + 1$$
$$= 2\left(1 + 2 + \cdots + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2 - 1}{4}$$

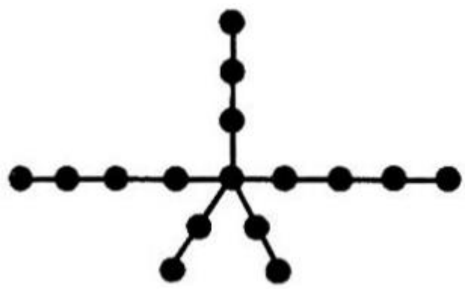
elde edilir. Düzgün bir çokgende her köşenin diğer köşelere uzaklıkları toplamı eşit olduğundan $D(1) = D(2) = \cdots = D(n)$ dir.

$$D(C_n) = \frac{D(1) + D(2) + \cdots + D(n)}{2}$$

$$= \frac{n \times \frac{n^2 - 1}{4}}{2} = \frac{n^3 - n}{8}$$

elde edilir. Bir doğru parçası demeti aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Dikkat edilirse 2 tane 4 birimlik, 2 tane 2 birimlik ve 1 tane 3 birimlik doğru parçasından oluşan bir doğru parçası demeti olduğu görülebilir. Bu şekli kısaca (4,4,3,2,2) ile gösterebiliriz. Bu doğru parçası demetindeki noktaların toplam uzaklıkları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır,

$$D(b_1, b_2, \ldots, b_m) = \binom{n+1}{3} - \sum_{1 \le i < j < k \le m} b_i b_j b_k$$



Şekil 1. Doğru parçası demeti $(4,4,3,2,2)$

Bu durumda

$$D(4,4,3,2,2) = \binom{16}{3} - 4.4.3 - 4.4.2 - 4.4.2 - 4.3.2 - 4.3.2 - 4.2.2 - 4.3.2 - 4.3.2 - 4.2.2 - 3.2.2$$
$$= 560 - 48 - 32 - 32 - 24 - 24 - 16 - 24 - 24 - 16 - 12 = 308$$

olarak hesaplanır.

Temel geometrik şekillerin sayısal karşılıklarını bulmada ikinci bir yöntem bağımsız kümelerden yararlanmaktır. Bir doğru parçasının ve bir düzgün çokgenin köşe noktalarını 1 den n ye kadar sıralamıştık Aynı işlemi burada da uygulayalım. Birimlendirilmiş bir doğru parçası üzerinde $n-1$ adet birim (bundan sonra kenar olarak adlandıralım) ve n nokta bulunur. Düzgün bir çokgen üzerinde ise $n-1$ kenar ve n nokta bulunur.

Bir şekil üzerinde köşe noktalarını birbirine komşu olmayacak şekilde alt kümelere ayırırsak bağımsız nokta kümelerini elde ederiz. İlginç şekilde bağımsız nokta kümelerinin sayısı Fibonacci ve Lucas sayıları şeklinde ortaya çıkmaktadır (Şahin, 2016). Bu durumda Fibonacci ve Lucas sayılarına bir giriş yapıp bağımsız kümelerin sayısına geri dönebiliriz.

Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Matematik sayıların ve desenlerin bilimidir. Matematiğe ilgi duyanların amaçlarından biri de bu sayıların, desenlerin ve bunların birbirleriyle olan ilişkilerinin gizemini çözmektir. Ayrıca kainatın yaratılışında dahi Fibonacci sayıları gizlenmiştir. Örneğin, ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola veya soldan sağa doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar Fibonacci sayı dizisinin ardışık terimleridir. Doğada ya bir bitkinin yapraklarında ya bir ağacın dallarında ya da kusursuz bir varlık olan insanın vücudunda bu durumu görmek mümkündür. Pascal üçgenindeki bazı katsayıların toplamında dahi Fibonacci sayıları görülür.

Fibonacci sayıları, yüzyıllardır matematikçilerin ve matematiğe ilgi duyanların vazgeçemediği bir kavramdır. Ayrıca bu sayı dizisinin altın oranla olan ilişkisi onun önemini bir kat daha artırmıştır ve bu ilişkiden dolayı sanatçıların, mühendislerin dahi ilgi odağı olmuştur. Bu iki kavram üzerine sayısız yazılar yazılmış ve çalışmalar yapılmıştır. Hatta o kadar ki, 1963 yılından beri sadece Fibonacci sayıları üzerine yapılmış olan akademik düzeydeki çalışmaların sonuçlarını yayımlayan "The Fibonacci Quarterly" isimli bir dergi kurulmuştur (Sertöz, 2020).

Fibonacci sayıları şu şekilde tanımlanır: ilk olarak iki adet 1 sayısı alınır ve sonra her seferinde bir önceki iki sayının toplamı alınarak bir sayı dizisi oluşturulur. İşte bu diziye Fibonacci dizisi denir ve bu dizideki sayılar da Fibonacci sayıları olarak anılır (Sertöz, 2020). Buna göre dizinin terimleri,

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377, \ldots$$

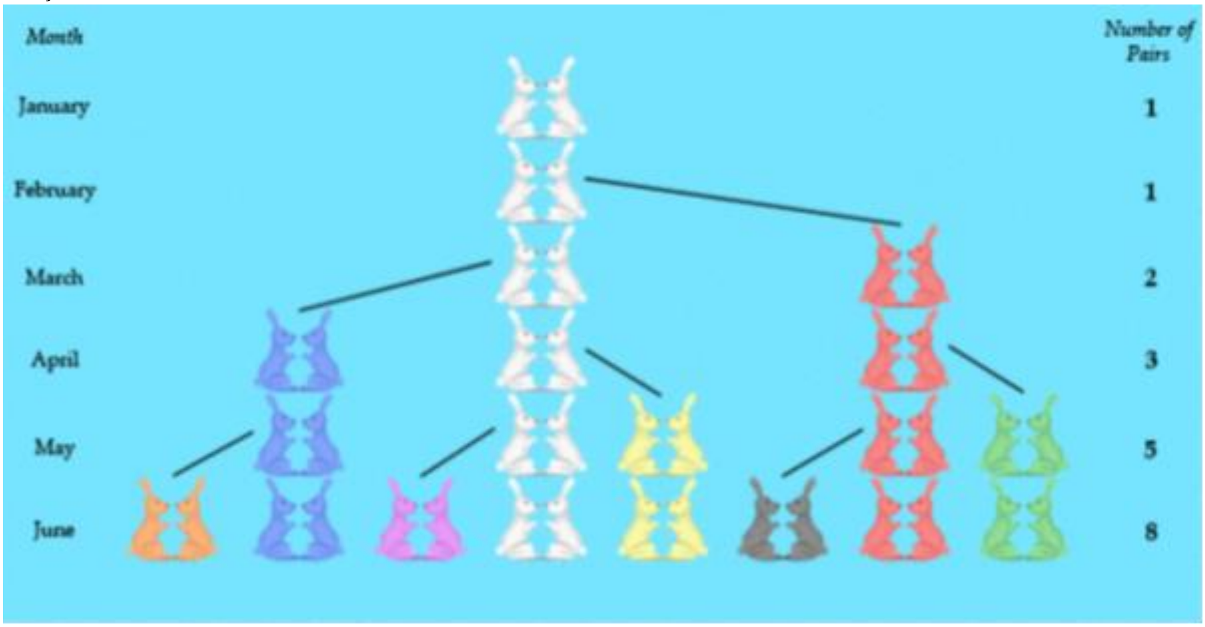
şeklindedir.

Bir doğru parçası öyle iki parçaya bölünsün ki; büyük parçanın uzunluğunun küçük parçanın uzunluğuna oranı, doğru parçasının kendi uzunluğunun bölündüğü büyük parçasının uzunluğuna olan oranına eşit olsun. İşte bu oran altın orandır. Fibonacci sayı dizisinde, her terim kendisinden bir önceki terime bölünerek ilerlenirse gittikçe altın oranın yaklaşık değeri olan 1,618 sayısı elde edilir (Sertöz, 2020).

Fibonacci sayı dizisi, ilk olarak Fibonacci olarak tanınan Leonardo of Pisa'nın Liber Abaci (1202) isimli kitabında ortaya çıkmıştır. Fibonacci, biyolojik olarak gerçekte olmayıp sadece düşünce olarak tasarladığı bir tavşan popülasyonunun gelişimini aşağıdaki varsayımlara dayanarak kurguladı (EMORY OXFORD COLLEGE, 2022):

1. Yeni doğmuş, bir erkek ve bir dişiden oluşan bir tavşan çifti bir tarlaya konulsun;
2. Tavşanlar bir aylık iken çiftleşebilir ve böylece ikinci ayın sonunda dişi tavşan, başka bir tavşan çifti üreyebilir;
3. Tavşanlar asla ölmez ve çiftleşen bir çift daima ikinci aydan itibaren her ay biri erkek biri dişi olmak üzere yeni bir çift üretir [Aşağıdaki şekle bakınız] (EMORY OXFORD COLLEGE, 2022).

Fibonacci'nin cevabını aradığı soru şuydu: Bu kurguya göre bir yılın sonunda kaç çift tavşan olacaktı?



n. ayın sonunda tarladaki tavşan çiftlerinin sayısının F_n ile gösterildiği varsayılsın. Sadece belirli aydaki yeni "bebek tavşan çiftleri" düşünülsün. Onlar, yavru tavşanlar doğurmak için yeterli olgunlukta olan tavşan çiftlerine eşit sayıda olmalıdırlar. Bu sayı, tam olarak iki ay önce yaşayan tavşan çiftlerinin sayısıdır, F_{n-2} (EMORY OXFORD COLLEGE, 2022).

Buna göre n. aydaki toplam tavşan çifti sayısı, bir önceki ayda yaşayan çiftlerin sayısı F_{n-1} ile yeni bebek tavşan çiftlerinin sayısı F_{n-2} nin toplamıdır (EMORY OXFORD COLLEGE, 2022).

Böylece, sonuçta Fibonacci sayı dizisi için aşağıdaki tekrarlı formül elde edilir:

$$F_1 = F_2 = 1,$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \geq 3) \ .$$

Benzer şekilde Lucas sayıları da i-inci Lucas sayısı L_i ile gösterilirse ilk terimleri $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \ (n \geq 3)$$

bağıntısı ile elde edilebilir. Bu formül yardımıyla Lucas sayı dizisinin ilk birkaç terimi şöyle sıralanabilir:

1,3,4,7,11,18,29,47,76.

Bağımsız Kümeler

Artık birimlendirilmiş doğru parçası ve düzgün çokgenler üzerindeki bağımsız nokta kümelerinin sayısını hesaplayabiliriz.

Önce beş noktalı bir doğru parçası ve beş köşeli bir düzgün çokgen için bağımsız kümelerin nasıl hesaplanacağını bulalım. Daha sonra elde edilen sonuçları genelleştirelim.

Beş noktalı bir doğru parçası alalım ve noktalarını 1,2,3,4 ve 5 ile adlandıralım. Böylece nokta kümemiz $N = \{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere bağımsız nokta alt kümelerini hesaplayabiliriz. Boş küme her kümenin alt kümesi olduğundan 0 elemanlı alt küme sayımız 1 dir. Bir elemanlı alt kümeler $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ in her biri kendi başına bağımsız bir kümedir.

2 elemanlı bağımsız alt kümeler $\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\}$.

3 elemanlı bağımsız alt küme bir tane olup $\{1,3,5\}$ den ibarettir. Böyleve P_5 in toplam bağımsız küme sayısını $i(P_5) = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$ olur. Bu sayı yedinci Fibonacci sayısıdır. Aşağıdaki tabloda 1 den 7 ye kadar nokta sayısına sahip doğru parçalarının bağımsız alt kümelerinin sayısı gösterilmiştir.

Tablo 1. Doğru parçaları için bağımsız kümelerin sayısı

Doğru Parçası	0 elemanlı	1 elemanlı	2 elemanlı	3 elemanlı	4 elemanlı	Toplam
P_1	1	1				2
P_2	1	2				3
P_3	1	3	1			5
P_4	1	4	3			8
P_5	1	5	6	1		13
P_6	1	6	10	4		21
P_7	1	7	15	10	1	34

Tablodan da anlaşılacağı üzere n noktalı bir doğru parçasının bağımsız kümelerinin sayısı

$$i(P_n) = F_{n+2}$$

yani $(n+2)$-inci Fibonacci sayısıdır.

Şimdi n noktalı bir düzgün çokgen için bağımsız kümelere geçelim. Yine örnek olarak 5 noktalı bir düzgün çokgen alalım ve köşelerini 1,2,3,4,5 ile adlandıralım. Böylece nokta kümemiz $N = \{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere bağımsız nokta alt kümelerini hesaplayabiliriz. Boş küme her kümenin alt kümesi olduğundan 0 elemanlı alt küme sayımız 1 dir. Bir elemanlı alt kümeler $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ in her biri kendi başına bağımsız bir kümedir.

2 elemanlı bağımsız alt kümeler $\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\}$.

Böyleve C_5 in toplam bağımsız küme sayısını $i(C_5) = 1 + 5 + 5 = 11$ olur. Bu sayı beşinci Lucas sayısıdır. Aşağıdaki tabloda 3 den 9 a kadar nokta sayısına sahip düzgün çokgenlerin bağımsız alt kümelerinin sayısı gösterilmiştir.

Tablo 2. Düzgün çokgenlerin bağımsız küme sayıları

Çokgen	0 elemanlı	1 elemanlı	2 elemanlı	3 elemanlı	4 elemanlı	Toplam
C_3	1	3				4
C_4	1	4	2			7
C_5	1	5	5			11
C_6	1	6	9	2		18
C_7	1	7	14	7		29
C_8	1	8	20	16	2	47
C_9	1	9	27	30	9	76

Tablodan da anlaşılacağı üzere n noktalı bir düzgün çokgenin bağımsız kümelerinin sayısı

$$i(C_n) = L_n$$

yani n-inci Lucas sayısıdır.

Bağımsız kümelerin toplamını her zaman böyle sayarak bulamayız. Bu hem zaman alıcı hem de geometrik şeklin nokta sayısı artınca hesaplaması zor olan bir işlemdir. Herhangi bir şeklin bağımsız nokta sayısı hesaplanırken şu yöntem uygulanır:

1. İlk önce bir nokta seçilerek bu nokta silindikten sonra geriye kalan şekillerin bağımsız küme sayılarının çarpımı bulunur.
2. Daha sonra ilk silinen noktaya komşu olan diğer noktalar silinerek geriye kalan şekillerin bağımsız kümelerin sayısı bulunur
3. Başlangıçtaki şeklimizin bağımsız kümelerin toplamının sayısı 1. ve 2. maddelerde elde edilen sayıların toplamıdır.

Örnek olarak Şekil 1 de verilen $(4,4,3,2,2)$ doğru parçası demetini ele alıp yukarıda verilen adımları uygulayalım.

1. İlk önce 5 tane doğru parçasının kesiştikleri merkez noktayı silerek birinci durumda 2 tane 4 noktalı, bir tane 3 noktalı ve 2 tane 2 noktalı doğru parçası elde edilir. Böylece bu şekillerin bağımsız kümelerinin sayıları çarpımı
$$i(D_1) = i(P_4)i(P_4)i(P_3)i(P_2)i(P_2) = F_6.F_6.F_5.F_4.F_4 = 8.8.5.3.3 = 2880$$
2. Daha sonra ilk silinen noktaya komşu olan diğer noktalar silinerek ikinci durumda iki tane 3 noktalı, bir tane 2 noktalı ve iki tane 1 noktalı doğru parçası elde edilir. Böylece bu şekillerin bağımsız kümelerinin sayıları çarpımı
$$i(D_2) = i(P_3)i(P_3)i(P_2)i(P_1)i(P_1) = F_5.F_5.F_4.F_3.F_3 = 5.5.3.2.2 = 300$$

3. Başlangıçtaki şeklimizin bağımsız kümelerin toplamının sayısı 1. ve 2. maddelerde elde edilen sayıların toplamıdır. Yani

$$i(4,4,3,2,2) = i(D_1) + i(D_2) = 2880 + 300 = 3180$$

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi 3180 tane bağımsız kümeyi saymak zor bir işlem olacağından bu yöntem çok daha kullanışlıdır.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada temel geometrik şekillerin sayısal niceliklerle ilişkilendirilmesinde noktalar arasındaki uzaklık (kenarlar takip edilerek) ve noktaların bağımsız alt kümelerinin sayıları toplamından yararlanılmıştır. Bu konular son yıllarda çok ilgi çekmekte olup 'Ayrık Matematik' kapsamında ele alınmaktadır. Bu çalışma aracılığıyla Ayrık Matematik konularından bazılarını duyurmayı ve bilinirliğini arttırmayı amaçlamaktayız.

Burada bahsedilen örnekler ilk olarak ardışık sayıların toplamı ve bir kümenin alt kümelerinin daha iyi anlaşılabilmesinde ders materyali olarak da kullanılabilir. Ayrıca bağımsız kümelerin sayıları Fibonacci ve Lucas sayıları cinsinden ifade edilebileceğinden temel geometrik şekillerin değişik sayı dizileriyle olan ilişkileri de bu projede ifade edilmeye çalışılmıştır.

Öneriler

Ayrık Matematik kapsamında ele alınan konulardan daha fazla yararlanarak bu tip çalışmaların sayısı arttırılabilir. Bu şekilde öğrenciler için ders materyali zenginliği arttırılabilir. Bu şekilde konular daha eğlenceli hale getirilip öğrenme güdüsü sağlanabilir

Kaynaklar

Büyükköse, Ş., Gök, G.K., (2020), Graf Teoriye Giriş, Nobel Yayınları.

EMORY OXFORD COLLE GE (2022). Fibonacci's Rabbits, Erişim tarihi: 04.10.2022, http://mathcenter.oxford.emory.edu/site/math125/fibonacciRabbits/

Sertöz, A. S., (2020). Kim bıkar altın orandan. Tübitak Bilim ve Teknik Dergisi, 632, 58-67.

Şahin, B., (2016), Fibonacci Sayıları ve Topolojik İndeksin Kimyasal Formüllerde İncelenmesi, Doktora Tezi.